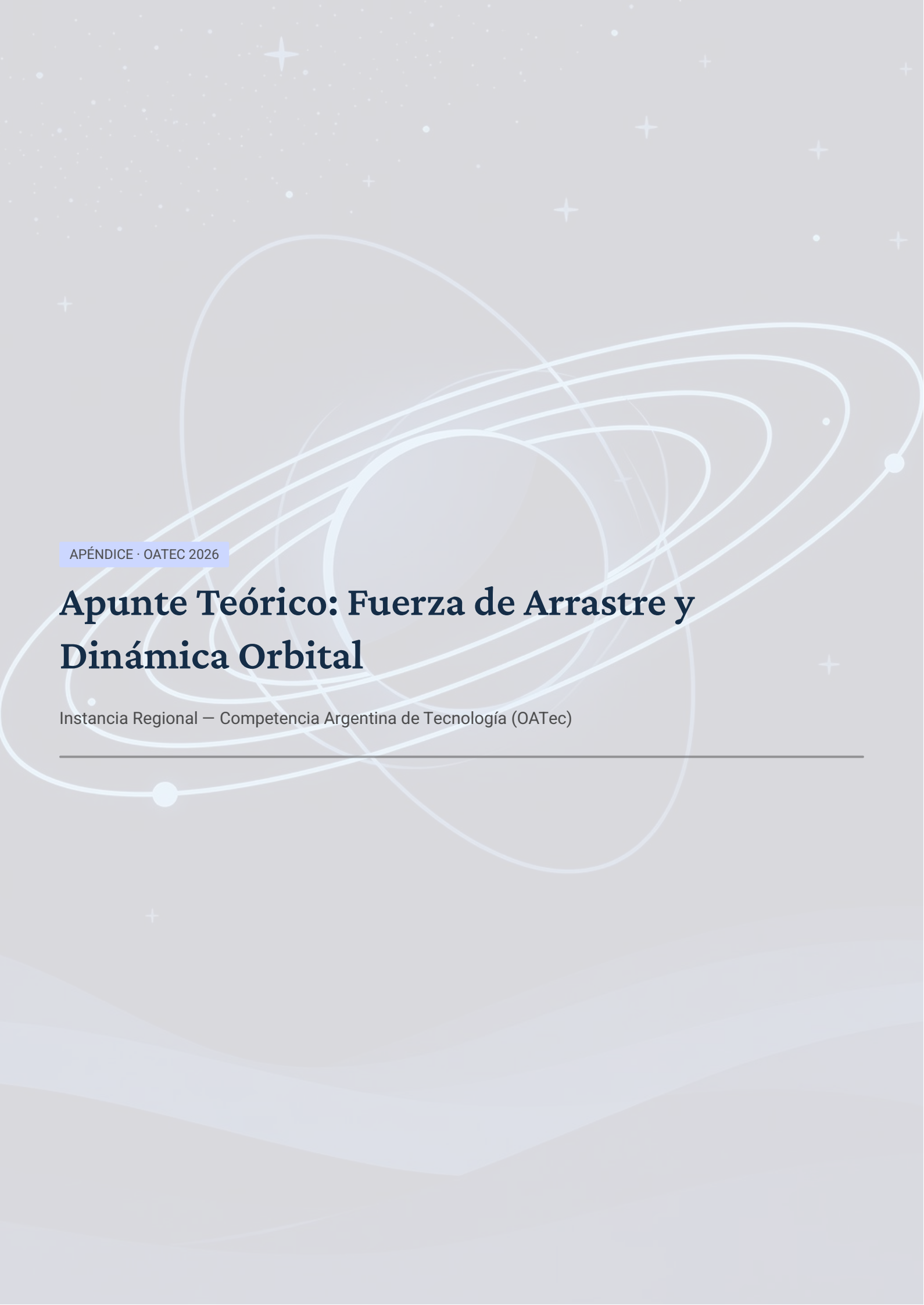




APÉNDICE · OATEC 2026

Apunte Teórico: Fuerza de Arrastre y Dinámica Orbital

Instancia Regional — Competencia Argentina de Tecnología (OATec)

1. Mecánica de Fluidos: Fuerza de Arrastre y Resistencia del Aire

En los modelos cinemáticos iniciales de caída libre, suele omitirse el efecto del medio en el que se desplaza el cuerpo. Sin embargo, cuando un objeto se mueve a velocidades considerables a través de un fluido (como la atmósfera terrestre), la resistencia del aire cobra una relevancia fundamental. A diferencia del rozamiento cinemático entre superficies sólidas rígidas, la fuerza de arrastre (F_d) no es constante, sino que presenta un comportamiento dinámico complejo que depende intrínsecamente de la rapidez del cuerpo (v), de las propiedades del fluido y de las características geométricas del objeto.

El Modelo Cuadrático de Resistencia

Para cuerpos macroscópicos a velocidades moderadas y altas, la magnitud de la fuerza de arrastre es proporcional al cuadrado de la rapidez:

$$F_d = bv^2$$

- v es la rapidez instantánea del objeto en el fluido.
- b es un coeficiente experimental constante que depende de la forma geométrica, el tamaño del objeto y la densidad del fluido. Es directamente proporcional al área transversal del objeto.
- El vector F_d posee sentido estrictamente opuesto al vector velocidad del cuerpo.

Rapidez Terminal (v_t)

Al caer desde el reposo, la fuerza de arrastre crece cuadráticamente hasta igualar el peso. En ese equilibrio dinámico la aceleración se anula:

$$\Sigma F_y = bv_t^2 - mg = 0$$

$$v_t = \sqrt{\frac{mg}{b}}$$

De la condición de equilibrio $bv_t^2 = mg$, se puede despejar b :

$$b = \frac{mg}{v_t^2}$$

Sustituyendo en $F_d = bv^2$, se obtiene F_d en función de v_t :

$$F_d = mg \left(\frac{v^2}{v_t^2} \right)$$

Para obtener la componente y de la aceleración (tomando positivo hacia arriba), se aplica la Segunda Ley de Newton en la dirección y :

$$\Sigma F_y = F_d - mg = ma_y$$

Sustituyendo la expresión de F_d :

$$ma_y = mg \left(\frac{v^2}{v_t^2} \right) - mg$$

Dividiendo ambos miembros por m :

$$a_y = g \left(\frac{v^2}{v_t^2} - 1 \right)$$

Balón en Caída: Aceleración a Mitad de la Rapidez Terminal

Se deja caer libremente un balón desde cierta altura. Calcular su aceleración para el instante en que su velocidad vale exactamente la mitad de la velocidad terminal ($v = v_t/2$).

01

Razón de rapidezces al cuadrado

$$\frac{v^2}{v_t^2} = \frac{(v_t/2)^2}{v_t^2} = \frac{1}{4}$$

02

Aceleración instantánea

$$a_y = g \left(\frac{1}{4} - 1 \right) = -\frac{3}{4}g$$

- ❏ El signo negativo ratifica que el vector aceleración sigue apuntando hacia el centro de la Tierra. El módulo de su aceleración representa el 75 % del valor que tiene la aceleración de la gravedad cuando la resistencia del aire no es considerada en los cálculos.

2. Cinemática y Dinámica del Movimiento Circular Uniforme (MCU)

El estudio de sistemas físicos en rotación (satélites, volantes, curvas viales o componentes mecatrónicos) se simplifica al desplazar el análisis desde distancias lineales hacia medidas angulares, ya que en un cuerpo rígido todos los puntos barren el mismo ángulo en un mismo intervalo de tiempo.

Desplazamiento Angular ($\Delta\theta$)

Variación de la posición angular de una línea radial de referencia: $\Delta\theta = \theta_f - \theta_i$. Por convención, sentido antihorario es positivo (+) y horario negativo (-).

El Radián como Unidad Adimensional

Razón entre el arco recorrido (s) y el radio (r):

$$\theta = \frac{s}{r}$$

Una revolución completa equivale a: $360^\circ = 2\pi \text{ rad}$

Rapidez Angular Instantánea ($|\omega|$)

Límite de la rapidez angular promedio cuando $\Delta t \rightarrow 0$:

$$|\omega| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Vinculación con rapidez lineal:

$$s = r\theta$$

$$v = r \cdot |\omega|$$

Período y Frecuencia

En el MCU, la rapidez angular $|\omega|$ y la rapidez lineal v permanecen constantes. Se definen:

- **Período (T):** tiempo para completar una revolución de 360° .
- **Frecuencia (f):** número de revoluciones por unidad de tiempo. Unidad: Hertz ($1 \text{ Hz} = 1 \text{ rev/s}$).

$$f = \frac{1}{T}$$

$$v = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r f$$

$$|\omega| = \frac{v}{r} = 2\pi f$$

Las Agujas de un Reloj: Período, Frecuencia y Velocidad Angular

Un reloj analógico es un ejemplo cotidiano perfecto del MCU. Sus tres agujas giran con rapidez angular constante, pero cada una tiene un período distinto. Calculemos T , f y ω para cada una.

Aguja	Período T	Frecuencia $f = 1/T$	Rapidez angular $\omega = 2\pi/T$
Segundero	60 s	$1/60 \text{ Hz} \approx 0,0167 \text{ Hz}$	$2\pi/60 \approx 0,1047 \text{ rad/s}$
Minutero	3 600 s (= 60 min)	$1/3600 \text{ Hz} \approx 2,78 \times 10^{-4} \text{ Hz}$	$2\pi/3600 \approx 1,745 \times 10^{-3} \text{ rad/s}$
Horario	43 200 s (= 12 h)	$1/43200 \text{ Hz} \approx 2,31 \times 10^{-5} \text{ Hz}$	$2\pi/43200 \approx 1,454 \times 10^{-4} \text{ rad/s}$

Mismo centro, distinto ω

Las tres agujas comparten el mismo eje de rotación, pero sus rapidezces angulares difieren en varios órdenes de magnitud.

El radián como unidad natural

ω se expresa en rad/s. Un radián es el ángulo central que subtiende un arco igual al radio. Una vuelta completa equivale a $2\pi \text{ rad} \approx 6,28 \text{ rad}$. Por eso aparece 2π en la fórmula de ω .

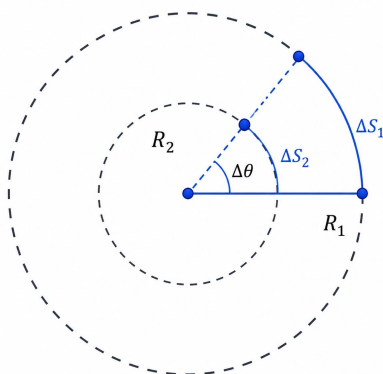
Rapidez lineal depende del radio

Si la aguja minutero mide $L = 8 \text{ cm} = 0,08 \text{ m}$, su extremo se mueve a

$$v = \omega \cdot L = 1,745 \times 10^{-3} \times 0,08 \approx 1,4 \times 10^{-4} \text{ m/s}.$$

Suponga ahora dos partículas unidas a una barra rígida (podría ser una de las agujas del reloj), que giran respecto a un punto fijo (centro) describiendo trayectorias circulares de radios R_1 y R_2 .

Sus rapidezces serán:



$$v_1 = \frac{2\pi R_1}{T}$$

$$v_2 = \frac{2\pi R_2}{T}$$

Vemos que no tienen la misma rapidez, pero sí el mismo período, la misma frecuencia y la misma rapidez angular ω :

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

Aceleración Radial o Centrípeta (a_c)

En el MCU la rapidez lineal v es constante, pero la dirección del vector velocidad cambia continuamente.

El vector velocidad es siempre tangente a la trayectoria circular y perpendicular al radio.

Todo cambio de dirección implica una aceleración. Dicha aceleración apunta siempre hacia el centro de la trayectoria circular, por eso la llamamos aceleración radial o centrípeta.

El módulo de la aceleración centrípeta se calcula como:

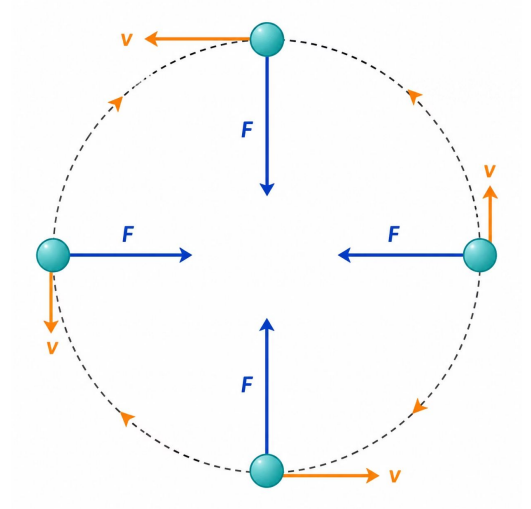
$$a_c = \frac{v^2}{r} = v |\omega| = \omega^2 r$$

De acuerdo con la segunda ley de Newton aplicada a componentes radiales, la existencia de una aceleración centrípeta requiere necesariamente que la sumatoria de las fuerzas reales actuantes generen una fuerza neta dirigida al centro de curvatura:

$$\sum F_c = m \cdot a_c$$

Es importante ver que no se trata de una nueva fuerza, sino que es la fuerza neta resultante de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo (tensión, gravedad, fricción o fuerzas normales).

- Dirección: radial (a lo largo del radio).
- Sentido: hacia el centro de la circunferencia (centrípeto).



Aceleración Centrípeta de la Tierra

Considerando que el radio ecuatorial de la Tierra es de 6378 km, determine la aceleración centrípeta de una persona parada sobre el ecuador debida a la rotación de la Tierra sobre su eje. Si además sabemos que la Tierra describe un movimiento casi circular alrededor del Sol, con un radio medio de 150 millones de kilómetros, ¿cuál será la aceleración centrípeta debida a dicho movimiento? Discuta por qué no somos capaces de percibir dichas aceleraciones.

Datos

- Radio ecuatorial de la Tierra: $R_T = 6378 \text{ km} = 6,378 \times 10^6 \text{ m}$
- Período de rotación de la Tierra sobre su eje: $T_1 = 24 \text{ h} = 86\,400 \text{ s}$
- Radio de la órbita terrestre alrededor del Sol: $R_S = 150 \times 10^6 \text{ km} = 1,50 \times 10^{11} \text{ m}$
- Período de traslación de la Tierra alrededor del Sol: $T_2 = 365,25 \text{ días} = 3,156 \times 10^7 \text{ s}$

a) Aceleración centrípeta por rotación terrestre

Aplicamos la expresión en función del período:

$$a_{r1} = \frac{4\pi^2 R_T}{T_1^2} = \frac{4\pi^2 \times 6,378 \times 10^6}{(86\,400)^2}$$

$$a_{r1} \approx 0,0337 \text{ m/s}^2 \approx 3,37 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2$$

b) Aceleración centrípeta por traslación alrededor del Sol

Aplicamos la misma expresión con los datos orbitales:

$$a_{r2} = \frac{4\pi^2 R_S}{T_2^2} = \frac{4\pi^2 \times 1,50 \times 10^{11}}{(3,156 \times 10^7)^2}$$

$$a_{r2} \approx 5,93 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$$

c) ¿Por qué no percibimos estas aceleraciones?

- Ambas aceleraciones son muy pequeñas comparadas con $g = 9,8 \text{ m/s}^2$: la rotación representa apenas el 0,34 % de g y la traslación el 0,06 % de g .
- Al ser aceleraciones centrípetas (no tangenciales), no producen cambio en la rapidez sino solo en la dirección del movimiento, lo que el cuerpo humano no detecta directamente.
- Nuestros sentidos (oído interno, propiocepción) solo perciben aceleraciones lineales o cambios bruscos de velocidad. Aceleraciones tan pequeñas y sostenidas durante períodos tan largos quedan completamente por debajo del umbral de percepción.

Se desarrollará a continuación una serie de ejemplos de aplicación del MCU.

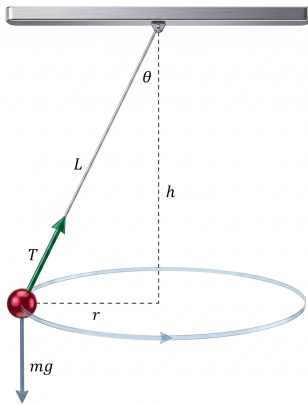
Ejemplo 1: El Péndulo Cónico

Ejemplo 2: Dinámica de Curvas Viales

- Caso A: Curvas sin peralte.
- Caso B: Curvas con peralte.
- Caso C: Casos particulares de la curva peraltada.

El Péndulo Cónico

Una masa m fija al extremo libre de una cuerda ideal de longitud L gira describiendo una circunferencia horizontal con rapidez angular constante $|\omega|$. La cuerda forma un ángulo fijo θ con el eje vertical.



1. Geometría del Sistema

El radio de la trayectoria circular horizontal se vincula con la longitud del cordón mediante:

$$r = L \sin \theta$$

2. Ecuaciones de Movimiento por Componentes

Eje Vertical ($a_y = 0$): la componente vertical de la tensión equilibra el peso:

$$T \cos \theta = mg$$

Eje Radial: la componente horizontal de la tensión provee la aceleración centrípeta:

$$T \sin \theta = m\omega^2 r$$

3. Resolución de la Rapidez Angular

Sustituyendo $r = L \sin \theta$ en la ecuación radial y combinando con la ecuación vertical:

$$T = m\omega^2 L$$

$$(m\omega^2 L) \cos \theta = mg \implies \omega^2 = \frac{g}{L \cos \theta}$$

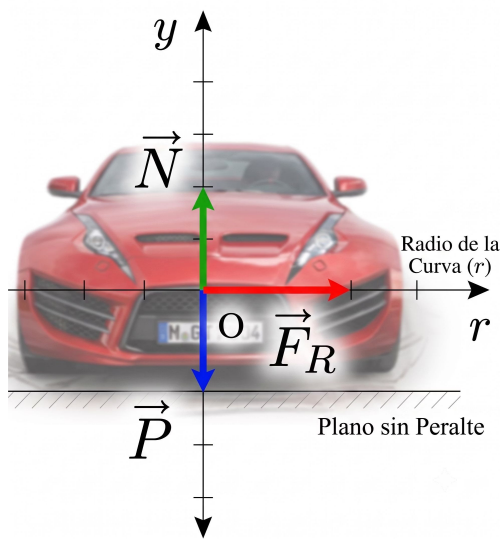
$$|\omega| = \sqrt{\frac{g}{L \cos \theta}}$$

❏ Este resultado demuestra que es físicamente imposible lograr que la cuerda gire en un plano estrictamente horizontal: si $\theta = 90^\circ$, $\cos(90^\circ) = 0$, lo que requeriría una rapidez angular infinita.

Dinámica de Curvas Viales

Cuando un vehículo de masa m transita por una curva horizontal de radio r con rapidez constante v , requiere una fuerza radial neta hacia el centro para evitar el derrape tangencial por inercia.

Caso A: Curva sin Peralte



La única fuerza en dirección radial es la fricción estática (f_e) entre el pavimento y los neumáticos:

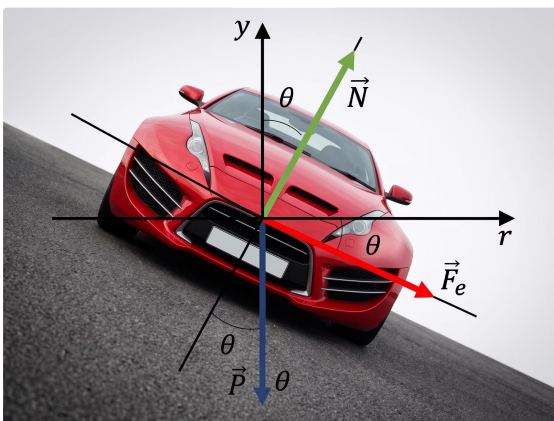
$$\Sigma F_c = f_e = m \frac{v^2}{r}$$

Condición de seguridad para evitar la derrapada ($f_e \leq \mu_e \cdot N$, con $N = mg$). Es decir: la fuerza de roce estática debe ser menor o igual a su máximo valor posible

$$m \frac{v^2}{r} \leq \mu_e mg \implies v \leq \sqrt{\mu_e g r}$$

Caso B: Curva con Peralte

Cuando se desea tomar de manera segura una curva con una rapidez elevada, se recurre a lo que se llama el peralte, que consiste en darle una ligera inclinación del piso.



Ahora existe una componente del roce y una componente de la normal en la dirección centrípeta (que sigue siendo horizontal)

$$\Sigma F_c = f_e \cos \theta + N \sin \theta = m \frac{v^2}{R}$$

$$\Sigma F_y = N \cos \theta - f_e \sin \theta - mg = 0$$

Casos Particulares de la Curva Peralzada

A partir de las ecuaciones generales de la curva con peralte, se pueden identificar dos rapidezces notables que definen los límites del comportamiento del vehículo.

Rapidez Óptima (v_{opt})

Se da cuando la fuerza de roce vale cero ($F_r = 0$). Esto no significa que no exista rozamiento, sino que no es necesario para que el móvil se desplace en la curva peraltada: la componente centrípeta de la normal es suficiente para mantener la trayectoria circular. El sistema de ecuaciones se reduce a:

$$\Sigma F_c = N \sin \theta = m \frac{v_{opt}^2}{R}$$

$$\Sigma F_y = N \cos \theta - mg = 0$$

Dividiendo ambas ecuaciones:

$$v_{opt} = \sqrt{\tan \theta \cdot g \cdot R}$$

Rapidez Máxima (v_{max})

Se da cuando la fuerza de roce alcanza su valor máximo con componente normal positiva ($F_r = \mu_e \cdot N$). Si se supera esta rapidez, el vehículo derrapa hacia afuera. El sistema de ecuaciones es:

$$\Sigma F_c = N \sin \theta + \mu_e N \cos \theta = m \frac{v_{max}^2}{R}$$

$$\Sigma F_y = N \cos \theta - \mu_e N \sin \theta - mg = 0$$

Resolviendo el sistema:

$$v_{max} = \sqrt{Rg \cdot \frac{\sin \theta + \mu_e \cos \theta}{\cos \theta - \mu_e \sin \theta}}$$

$$v_{max} = \sqrt{Rg \cdot \frac{\tan \theta + \mu_e}{1 - \mu_e \tan \theta}}$$

Para rapidezces entre v_{opt} y v_{max} , la fuerza de roce actúa hacia adentro de la curva. Para rapidezces menores a v_{opt} , la fuerza de roce actúa hacia afuera.

3. Dinámica Orbital y Energía Potencial Gravitatoria a Gran Altura.

A escalas astronómicas (satélites artificiales, sondas espaciales, trayectorias planetarias), la hipótesis de fuerza gravitatoria constante pierde validez. Debe emplearse formalmente la Ley de Gravitación Universal de Newton.

Ley de Gravitación Universal

La magnitud de la fuerza de atracción mutua F entre dos masas puntuales m_1 y m_2 vale:

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$$

- $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2$ es la constante de gravitación universal.
- r es la distancia medida entre los centros de masa de ambos cuerpos.
- La fuerza F es atractiva y actúa a lo largo de la línea que une los centros de masa de ambos cuerpos, dirigida de cada masa hacia la otra (acción y reacción).

❏ En forma vectorial, la fuerza sobre m_1 apunta desde m_1 hacia m_2 , y la fuerza sobre m_2 apunta desde m_2 hacia m_1 ; ambas tienen igual módulo y sentidos opuestos, en concordancia con la Tercera Ley de Newton.

Rapidez Orbital (v)

Para un satélite de masa m en órbita circular estable de radio r alrededor de un planeta de masa M , la única fuerza actuante es la gravitatoria. Aplicando la Segunda Ley de Newton en componentes radiales:

$$\frac{GmM}{r^2} = m \left(\frac{v^2}{r} \right)$$

Cancelando m a ambos lados:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Conclusiones clave:

- La rapidez orbital es completamente independiente de la masa del satélite.
- Los satélites en órbitas más bajas (menor r) deben desplazarse a rapidezces mayores.

Energía Potencial Gravitatoria Generalizada

A partir del trabajo realizado por la fuerza gravitatoria a lo largo del desplazamiento radial, se puede deducir la siguiente expresión para la energía potencial:

$$U(r) = -\frac{Gm_1m_2}{r}$$

El nivel de referencia cero se asigna al infinito ($U = 0$ cuando $r \rightarrow \infty$). Por ello U adopta valores negativos para cualquier distancia finita r . La energía potencial aumenta (se vuelve menos negativa) al aumentar la separación.

Rapidez de Escape (v_e)

Rapidez inicial mínima para escapar definitivamente de la atracción gravitatoria, alcanzando $r \rightarrow \infty$ sin propulsión adicional. Aplicando conservación de energía mecánica:

Estado inicial (superficie, radio R):

$$E_{m,i} = \frac{1}{2}mv_i^2 - \frac{GMm}{R}$$

Estado final ($r \rightarrow \infty$, $K_f = 0$, $U_f = 0$):

$$E_{m,f} = 0$$

Por conservación de la energía:

$$\frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{GMm}{R}$$

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

- ❏ v_e depende únicamente de M y R del astro. Es independiente de la masa del proyectil y de la dirección de lanzamiento.

Tercera Ley de Kepler: Deducción Newtoniana

El marco de la mecánica newtoniana permite validar analíticamente las observaciones empíricas de Kepler. Para órbitas circulares estables, a continuación derivamos la Tercera Ley de Kepler.

01

Rapidez orbital desde la dinámica

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

02

Rapidez orbital desde la cinemática

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

03

Igualando ambas expresiones y elevando al cuadrado

$$\frac{GM}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2}$$

04

Tercera Ley de Kepler

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM} \right) \cdot r^3$$

- ❏ El cuadrado del período orbital es directamente proporcional al cubo del radio de la trayectoria. La constante de proporcionalidad ($4\pi^2/GM$) no depende de la masa del satélite orbitante, siendo universalmente válida para todos los cuerpos que orbiten alrededor de una misma masa central M .